Mathématiques - Concours ATS 2016
Proposition de corrigé

Exercice 1 :

1. Soit a et b deux suites de U.
   On a alors $\forall n \in \mathbf{N},\ a_{n+2} = a_{n+1}+2a_n$ et $b_{n+2} = b_{n+1}+2b_n$. On en déduit alors $\forall n \in \mathbf{N},\ a_{n+2}+b_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} + 2(a_n + b_n)$ c'est-à-dire $\boxed{a + b \in U}$
   Soit $\alpha \in \mathbf{R}$, alors on a $\forall n \in \mathbf{N},\ \alpha a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + 2(\alpha a_n)$, c'est-à-dire $\boxed{\alpha a \in U}$.
   La suite nulle vérifie bien aussi la relation donnée par l'énoncé.
   $\boxed{U \text{ est alors un sous-espace vectoriel sur } \mathbf{R} \text{ de l'ensemble des suites réelles.}}$

2. (a) Montrons que la famille (c, d) est libre.
   Je forme une combinaison linéaire égale à la suite nulle, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbf{N},\ \alpha c_n + \beta d_n = 0$. Cette égalité est donc vraie en particulier pour $n = 0$ et $n = 1$.
   Compte tenu de la définition des suites c et d, on en déduit que $\alpha = \beta = 0$. On a donc $\forall n \in \mathbf{N},\ \alpha c_n + \beta d_n = 0$ alors $\alpha = \beta = 0$: $\boxed{\text{La famille } (c, d) \text{ est libre.}}$
   Montrons que la famille (c, d) est génératrice de U.
   Soit $u \in U$. On veut montrer qu'il existe α et β tels que $u = \alpha c + \beta d$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbf{N},\ u_n = \alpha c_n + \beta d_n$.
   Condition nécessaire :
   L'égalité doit être vérifiée pour $n = 0$ et $n = 1$. Ceci impose que $\alpha = u_0$ et $\beta = u_1$.
   Condition suffisante :
   Montrons que pour $\alpha = u_0$ et $\beta = u_1$, la propriété $P_n : u_n = \alpha c_n + \beta d_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.
   On procède par récurrence (forte) sur n.
   — Initialisation : P_0 est clairement vraie.
   — Hérédité : supposons que la propriété soit vraie jusqu'au rang $n + 1$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n + 2$.
     Comme $u \in U$,
     $$\begin{aligned} u_{n+2} &= u_{n+1} + 2u_n \\ &= u_0 c_{n+1} + u_1 d_{n+1} + 2(u_0 c_n + u_1 d_n) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= u_0(c_{n+1} + 2c_n) + u_1(d_{n+1} + 2d_n) \\ &= u_0 c_{n+2} + u_1 d_{n+2} \text{ car } c \text{ et } d \text{ appartiennent à } U \end{aligned}$$
     Ainsi P_{n+2} est vraie.
   Par le principe de récurrence, P_n est donc vraie pour tout entier n. On a alors bien exprimé u comme combinaison linéaire de c et d. $\boxed{\text{la famille } (c, d) \text{ est une famille génératrice de } U.}$
   La famille (c, d) étant libre et génératrice de U, alors $\boxed{\text{la famille } (c, d) \text{ est une base de } U.}$

   (b) Une base de U est composée de deux vecteurs donc $\boxed{U \text{ est de dimension 2.}}$

3. (a) Cherchons les suites géométriques de raison $q \neq 0$, $(q^n)_{n\in\mathbf{N}}$ appartenant à U.
   On a alors $q^{n+2} = q^{n+1} + 2q^n$, soit en simplifiant par $q^n \neq 0$, q vérifie l'équation $q^2 - q - 2 = 0$, c'est-à-dire $(q + 1)(q - 2) = 0$.
   Avec les notations de l'énoncé, on a donc $\boxed{\rho = -1 \text{ et } \sigma = 2}$

   (b) Les deux suites $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne sont pas proportionnelles donc forment une famille libre de U.
   Or U est de dimension 2, donc $\boxed{\text{la famille } (r, s) \text{ est une base de } U.}$

4. (a) Soit (α, β) les composantes de la suite v dans la base (r, s).
   On a alors $\forall n \in \mathbf{N},\ v_n = \alpha r_n + \beta s_n$, donc en particulier pour $n = 0$ et $n = 1$, sachant que $r_0 = s_0 = 1$, $r_1 = -1$, $s_1 = 2$.

Cela donne le système $\begin{cases} \alpha + \ \ \beta = x \\ -\alpha + 2\beta = y \end{cases}$ d'où l'on tire immédiatement

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{3}(2x - y), \quad \beta = \frac{1}{3}(x + y)}$$

(b) On en déduit alors

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_n = \frac{1}{3}(2x - y)(-1)^n + \frac{1}{3}(x + y)2^n}$$

5. (a) Version récursive en pseudo-code :

Fonction F(x,y,n)

si $n = 0$ **alors**
  retourner x
sinon
  si $n = 1$ **alors**
    retourner y
  sinon
    retourner
    $\mathrm{F}(x, y, n - 1) + 2\mathrm{F}(x, y, n - 2)$
  fin
fin

Version récursive en Scilab :

```
function u=F(x,y,n)
    if n==0 then
        u=x
    else
        if n==1 then
            u=y
        else
            u=F(x,y,n-1)+2*F(x,y,n-2)
        end
    end
endfunction
```

Version itérative en pseudo-code :

Fonction F(x,y,n)

$u(0) \leftarrow x$
$u(1) \leftarrow y$
pour i *valant de* 2 *à* n **faire**
  $u(i) \leftarrow u(i - 1) + 2u(i - 2)$
fin
retourner $u(n)$

Version itérative en Scilab :

```
function u=F(x,y,n)
//les indices commencent a 1 avec
Scilab
    suite_u=[x,y]
    for i = 2:n
        suite_u=[suite_u,suite_u(i)
+2*suite_u(i-1)]
    end
    u=suite_u(n+1)
endfunction
```

(b) Version en pseudo-code :

Fonction G(x,y,n)

retourner
$\frac{1}{3}((2x - y) \times (-1)^n + (x + y) \times 2^n)$

Version en Scilab :

```
function u=G(x,y,n)
    u=1/3*((2*x-y)*(-1)^n+(x+y)*2^n)
endfunction
```

(c) La version la plus économique en nombre d'opérations (et donc la plus rapide) est la fonction G. La version récursive de F a un temps de calcul qui croît exponentiellement en fonction de n. En effet, chaque appel à $\mathrm{F}(x, y, n)$ engendre deux appels à cette même fonction F. Les temps de calculs sous Scilab deviennent effectivement rédhibitoires pour $n > 30$ (en 2016 !).

Exercice 2 :

1. (a) On sait que l'image d'une famille génératrice est une famille génératrice de l'image, et que pour écrire une matrice d'une application linéaire, on écrit l'image des vecteurs de base dans la base d'arrivée.

   On a donc ici $f(u_1) = f(u_3) = u_2,\ f(u_2) = u_1 + u_2 + u_3$. Ces deux vecteurs $f(u_1)$ et $f(u_2)$ sont non colinéaires donc forment une base de l'image de f.

   $\boxed{\text{Une base de l'image de } f \text{ et } (u_2, u_1 + u_2 + u_3)}$.

   $u = (x, y, z) \in \ker f \iff f(u) = (0, 0, 0)$ soit en écriture matricielle $AU = 0$. Cela se traduit en $\begin{cases} y = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = -x \end{cases}$ c'est-à-dire $\ker f = \mathbf{Vect}(u_1 - u_3)$

   $\boxed{\text{Une base du noyau de } f \text{ est composée du vecteur } u_1 - u_3}$

   (b) Le polynôme caractéristique de la matrice A est

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -\lambda & 1-\lambda & 1 \\ \lambda & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \quad C_1 - C_3 \to C_1 \\
&= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \quad L_1 + L_3 \to L_3 \\
&= -\lambda \left[-\lambda(1-\lambda) - 2 \right] \\
&= -\lambda(\lambda^2 - \lambda - 2)
\end{aligned}$$

   c'est-à-dire $\boxed{P(\lambda) = -\lambda(\lambda + 1)(\lambda - 2)}$

   (c) Les valeurs propres de la matrice A sont les racines du polynôme caractéristique d'où $\boxed{\text{les valeurs propres de}}$

   (d) — Le vecteur propre $v_1 = (x, y, z)$ associé à la valeur propre -1 vérifie $AV_1 = -V_1$ c'est-à-dire qu'il faut résoudre le système $\begin{cases} y = -x \\ x + y + z = -y \\ y = -z \end{cases}$ ce qui équivaut à, après simplification, $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x = x \\ y = -x \\ z = x \end{cases}$. D'où $\boxed{v_1 = (1, -1, 1)}$

   — Le sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 0$ correspond au noyau de f, donc $\boxed{v_2 = (1, 0, -1)}$

   — De même, le vecteur propre $v_3 = (x, y, z)$ associé à la valeur propre 2 vérifie $AV_1 = 2V_1$ c'est-à-dire qu'il faut résoudre le système $\begin{cases} y = 2x \\ x + y + z = 2y \\ y = 2z \end{cases}$ ce qui équivaut à, après simplification, $\begin{cases} -2x + y = 0 \\ x - y + z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x = x \\ y = 2x \\ z = x \end{cases}$. D'où $\boxed{v_3 = (1, 2, 1)}$

(e) La matrice A admettant valeurs propres distinctes, donc d'après la condition suffisante de diagonalisation, la matrice a est diagonalisable dans une base de vecteurs propres : $\boxed{(v_1, v_2, v_3) \text{ forme une base de } E.}$

2. (a) Comme la matrice A est diagonalisable, comme dit précédemment, on a $\boxed{D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

P est une matrice de passage dont les colonnes sont constituées des vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres. Les vecteurs propres déterminés précédemment respectent la contrainte de cette question. Donc $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$ avec $\boxed{A = PDP^{-1}.}$

(b) Pour inverser la matrice P, on résout le système $PX = Y$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Le système est alors $\begin{cases} x + y + \ \ z = a & L_1 \\ -x \qquad + 2z = b & L_2 \\ x - y + \ \ z = c & L_3 \end{cases}$

soit

$$\begin{cases} x + y + \ \ z = a & L_1 \longleftarrow L_1 \\ -x \qquad + 2z = a & L_2 \longleftarrow L_2 \\ 2x \qquad + 2z = a + c & L_3 \longleftarrow L_1 + L_3 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x + y + \ \ z = a & L_1 \longleftarrow L_1 \\ -x \qquad + 2z = a & L_2 \longleftarrow L_2 \\ \qquad\qquad 6z = a + 2b + c & L_3 \longleftarrow 2L_2 + L_3 \end{cases}$$

On en déduit alors $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}(a - b + c) \\ y = \dfrac{1}{2}(a - c) \\ z = \dfrac{1}{6}(a + 2b + c) \end{cases}$

On a alors

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

3. Par calcul immédiat, on a $\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}$

4. Montrons par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$ la propriété :

Il existe des réels $a_1, \ldots, a_{n+2}$ tels que $A^k = \begin{pmatrix} a_k & a_{k+1} & a_k \\ a_{k+1} & a_{k+2} & a_{k+1} \\ a_k & a_{k+1} & a_k \end{pmatrix}$ pour tout entier k compris entre 1 et n.

— Initialisation : pour $n = 1$, $a_1 = 0$ et $a_2 = a_3 = 1$ conviennent.

— Hérédité : on suppose la propriété vraie au rang n. Pour la montrer au rang suivant, il suffit de montrer qu'il existe un réel a_{n+3} tel que :

$A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+2} & a_{n+3} & a_{n+2} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+1} \end{pmatrix}$.

Or $A^{n+1} = AA^n = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+2} & a_{n+2} + 2a_{n+1} & a_{n+2} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+1} \end{pmatrix}$

donc $a_{n+3} = a_{n+2} + 2a_{n+1}$ convient.

— Conclusion :

$$\boxed{\text{il existe une suite de réels } (a_n) \text{ telle que pour tout entier } n \geqslant 1,\ A^n = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_n & a_{n+1} & a_n \end{pmatrix}.}$$

5. (a) Par calcul matriciel immédiat, on a bien $B\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ du fait de la relation $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$

(b) Déterminons le polynôme caractéristique de la matrice B. On a

$$\begin{aligned} P_B(\mu) &= \begin{vmatrix} 1-\mu & 2 \\ 1 & -\mu \end{vmatrix} \\ &= -\mu(1-\mu) - 2 \\ &= \mu^2 - \mu - 2 \end{aligned}$$

soit $\boxed{P_B(\mu) = (\mu+1)(\mu-2)}$

Les valeurs propres de B sont alors $\boxed{\mu_1 = -1,\ \mu_2 = 2}$

Recherchons les vecteurs propres associés : Soit $w_1 = (x, y)$ vecteur propre associé à μ_1 : il vérifie alors $BW_1 = -X_1$ ce qui se traduit en système $\begin{cases} x + 2y = -x \\ x = -y \end{cases}$, soit $x + y = 0$ d'où, par exemple $\boxed{w_1 = (1, -1)}$

De même, soit $w_2 = (x, y)$ vecteur propre associé à la valeur propre 2. il vérifie $BW_2 = 2W_2$ ce qui se traduit en système $\begin{cases} x + 2y = 2x \\ x = 2y \end{cases}$, soit $x - 2y = 0$ d'où, par exemple $\boxed{w_1 = (2, 1)}$

La matrice B admettant deux valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable d'après la condition suffisante de diagonalisation.

On a alors $B = Q\Delta Q^{-1}$ avec

$$\boxed{\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

(c) Pour inverser Q, on résout le système $QX = Y$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Cela se traduit en

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ -x + \ \ y = b \end{cases} \text{ soit immédiatement } \begin{cases} x = \dfrac{1}{3}(a - 2b) \\ \\ y = \dfrac{1}{3}(a + b) \end{cases} \text{ soit } \boxed{Q^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

(d) On a immédiatement $B^n = Q\Delta^n Q^{-1}$, soit par calcul matriciel

$$\boxed{B^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{n+1} + (-1)^n & 2^{n+1} - 2(-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}}$$

6. (a) On a $\begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ donc par récurrence immédiate, on obtient $\boxed{\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = B^{n-1}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}}$

(b) Sachant que $a_1 = 0$ et $a_2 = 1$, on en déduit

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad a_n = \frac{1}{3}(2^{n-1} + (-1)^n)}$$

Exercice 3 :

1. (a) Soit $x > 0$, $\lim\limits_{y\to 0^+} xy^2 = 0$, donc $\ln(1+xy^2) \underset{y\to 0^+}{\sim} xy^2$.

   Par quotient, $\dfrac{\ln(1+xy^2)}{y^2} \underset{y\to 0^+}{\sim} x$, et comme $x > 0$,

   $$\boxed{\lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(1+xy^2)}{y^2} = x.}$$

   (b) $y \mapsto \dfrac{\ln(1+xy^2)}{y^2}$ est continue sur $]0,1]$, donc l'intégrale définissant g est une intégrale impropre en la borne 0. Cependant, nous avons montré à la question précédente que la fonction $y \mapsto \dfrac{\ln(1+xy^2)}{y^2}$ est prolongeable par continuité en 0, donc

   $$\boxed{\text{l'intégrale impropre définissant } g \text{ est convergente.}}$$

2. (a) Posons $u \in]0,1]$, et effectuons une intégration par parties pour calculer $\displaystyle\int_u^1 \frac{\ln(1+xy^2)}{y^2}\mathrm{d}y$.

   Posons $h(y) = \ln(1+xy^2)$ et $k'(y) = \dfrac{1}{y^2}$; $h'(y) = \dfrac{2xy}{1+xy^2}$ et $k(y) = -\dfrac{1}{y}$.

   h et k sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[u,1]$. L'intégration par parties donne :

   $$\begin{aligned}\int_u^1 \frac{\ln(1+xy^2)}{y^2}\mathrm{d}y &= \left[-\frac{1}{y}\ln(1+xy^2)\right]_u^1 + \int_u^1 \frac{2x}{1+xy^2}\mathrm{d}y \\ &= -\ln(1+x) + \frac{1}{u}\ln(1+xu^2) + 2x\int_u^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+xy^2}\end{aligned}$$

   Or on montre comme à la question 1) a) que $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\ln(1+xu^2)}{u} = \lim\limits_{u\to 0} x\dfrac{u^2}{u} = \lim\limits_{u\to 0} xu = 0$, et comme $y \mapsto \dfrac{1}{1+xy^2}$ est continue sur [0,1], on a $\lim\limits_{u\to 0}\displaystyle\int_u^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+xy^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+xy^2}$.

   $$\boxed{\text{Pour tout } x > 0,\ g(x) = -\ln(1+x) + 2x\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+xy^2}.}$$

   (b) Rappelons que $x > 0$. Posons $u = \sqrt{x}\,y$, alors $\mathrm{d}u = \sqrt{x}\,\mathrm{d}y$.

   $y \mapsto \sqrt{x}\,y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$; $u \mapsto \dfrac{1}{1+u^2}$ est continue sur $[0,\sqrt{x}]$. Le changement de variable donne :

   $$\boxed{\text{Pour tout } x > 0,\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+xy^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \text{ (on a donc } a(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ et } b(x) = \sqrt{x}).}$$

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+xy^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[\arctan(u)\right]_0^{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\arctan(\sqrt{x}) - \underbrace{\arctan(0)}_{=0}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\arctan(\sqrt{x})$. Donc :

   $$\boxed{\text{Pour tout } x > 0,\ g(x) = -\ln(1+x) + 2\sqrt{x}\arctan(\sqrt{x}).}$$

   (d) D'après l'expression de g trouvée ci-dessus, g est bien dérivable sur $]0,+\infty[$ (par opérations sur les fonctions usuelles).

   $$\boxed{\text{Pour tout } x > 0,\ g'(x) = -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\arctan(\sqrt{x}) + 2\sqrt{x}\times\frac{1}{1+x}\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\arctan(\sqrt{x}).}$$

   On peut remarquer déjà à ce stade que $g'(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+xy^2}$.

3. (a) Soit $y \in]0,1]$ fixé. La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+xy^2)}{y^2}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe sur $]0,+\infty[$.

   $$\boxed{\text{pour tout } y \in]0,1],\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y^2}\times\frac{y^2}{1+xy^2} = \frac{1}{1+xy^2}.}$$

(b) On a déjà calculé précédemment que :

$$\boxed{\text{pour tout } y \in]0,1],\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+xy^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}\arctan(\sqrt{x}).}$$

(c) On constate que :

$$\boxed{\text{pour tout } x > 0,\ g'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}y.}$$

Exercice 4 :

1. Courbe représentative de la fonction g :

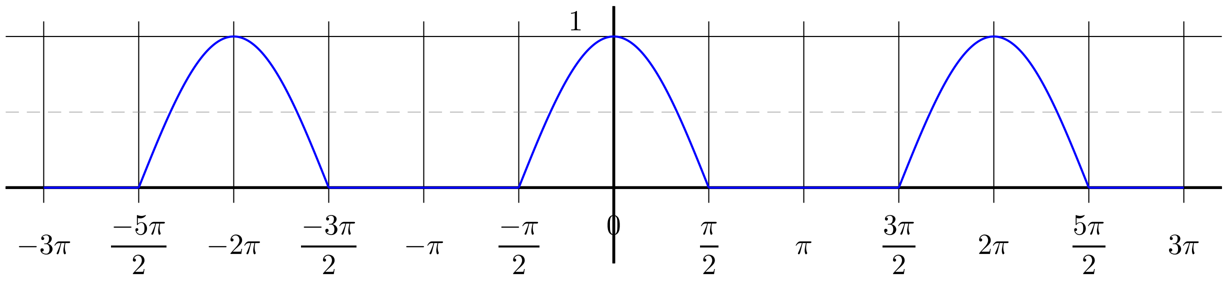

FIGURE 1 – Courbe représentative de g

2. Si $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, alors $-t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $g(-t) = \cos(-t) = \cos(t) = g(t)$.
Si $t \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$, alors $-t \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$ et $g(-t) = 0 = g(t)$.
$g(-\pi) = g(-\pi + 2\pi) = g(\pi)$.
On a montré pour l'instant que : pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, $g(-t) = g(t)$.
La 2π-périodicité permet ensuite de montrer que : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(-t) = g(t)$. En effet : soit $t \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $t + 2k\pi \in [-\pi, \pi]$.
$g(-t) = g(-t - 2k\pi) = g(-(t + 2k\pi)) \underbrace{=}_{\text{d'après ci-dessus}} g(t + 2k\pi) = g(t)$

$\boxed{g \text{ est paire.}}$

3. (a) La fonction g étant paire, $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ b_n = 0}$

(b) On a

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g(t)\,\mathrm{d}t \quad g \text{ est paire} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi/2}\,[\sin t]_0^{\pi/2} \end{aligned}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos t \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} g(t)\cos t \,\mathrm{d}t \quad g \text{ est paire} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \cos^2 t \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2} \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi/2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi/2} \\
&\boxed{a_1 = \frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

(c) Pour $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(nt) \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} g(t)\cos(nt) \,\mathrm{d}t \quad g \text{ est paire} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \cos t\cos(nt) \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$ d'où $\cos t \cos(nt) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(n+1)t + \cos(n-1)t\right)$.
En remplaçant, on a donc

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \left(\cos(n+1)t + \cos(n-1)t\right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n+1}\sin(n+1)t + \frac{1}{n-1}\sin(n-1)t\right]_0^{\pi/2}
\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + \frac{1}{n-1}\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)\right)}$$

(d) Si n est impair et $n \neq 1$, alors $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbf{N}^*$. D'où $\begin{cases}(n+1)\pi/2 = (k+1)\pi \\ (n-1)\pi/2 = (k-1)\pi\end{cases}$ et

$\begin{cases}\sin(k+1)\pi = 0 \\ \sin(k-1)\pi = 0\end{cases}$, c'est-à-dire

$\boxed{\text{Pour } n \text{ impair et } n \neq 1,\ a_n = 0}$

(e) Si n est pair, alors $n = 2p$ avec $p \in \mathbf{N}$. D'où $\begin{cases}(n+1)\pi/2 = (2p+1)\pi/2 = p\pi + \pi/2 \\ (n-1)\pi/2 = (2p-1)\pi/2 = p\pi - \pi/2\end{cases}$ et

Or $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ et $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$, $\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$ et $\cos(p\pi) = (-1)^p$, on en déduit $\sin\left(p\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = (-1)^p$ et $\sin\left(p\pi - \dfrac{\pi}{2}\right) = -(-1)^p$.
En remplaçant dans l'expression du 3c, on a

$$a_{2p} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^p}{2p+1} - \frac{(-1)^p}{2p-1}\right)$$

Soit en réduisant au même dénominateur

$$\boxed{\forall p \geqslant 1,\ a_{2p} = \frac{2(-1)^{p+1}}{\pi(4p^2-1)}}$$

4. (a) Il faut vérifier les conditions de Dirichlet pour la fonction g :
   — la fonction g est 2π-périodique ;
   — la fonction g est continue sur $\mathbf{R}$;
   — la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$.

   Les conditions de Dirichlet sont alors vérifiées, alors, d'après le théorème de Dirichlet, pour tout réel t où la fonction g est continue, la série de Fourier converge vers la fonction g, soit

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R},\ g(t) = Sg(t)}$$

   (b) Écrivons cette série de Fourier de g en faisant attention au fait que la formule des a_n obtenue au 3e n'est vraie qu'à partir de $p = 1$.

$$\begin{aligned} Sg(t) &= a_0 + a_1 \cos t + \sum_{p=1}^{+\infty} a_{2p} \cos(2pt) \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos t + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(4p^2-1)} \cos(2pt) \end{aligned}$$

   Or $\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$, $Sg(t) = g(t) = \cos t$, on obtient $\frac{1}{2} \cos t = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(4p^2-1)} \cos(2pt)$

   Soit

$$\boxed{\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right],\ \cos t = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(4p^2-1)} \cos(2pt)}$$

   (c) En choisissant $t = 0$ dans la relation précédente du 4b, et sachant que $\cos 0 = 1$, on en déduit après simplification,

$$\boxed{\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(4p^2-1)} = \frac{\pi - 2}{4}}$$

5. (a) La fonction g étant continue sur $\mathbf{R}$, nous pouvons appliquer la relation de Parseval, qui est

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g^2(t)\, \mathrm{d}t = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

   On a déjà

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g^2(t)\, \mathrm{d}t &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} g^2(t)\, \mathrm{d}t \quad g^2 \text{est paire} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi/2} \cos^2(t)\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} a_1 \end{aligned}$$

   soit $\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g^2(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{4}}$

   En remplaçant dans l'égalité de Parseval, on obtient

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{4}{\pi^2} \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4p^2-1}\right)^2$$

   soit après simplification

$$\boxed{\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4p^2-1}\right)^2 = \frac{\pi^2 - 8}{16}}$$

Exercice 5 :

1. Un point $M(x,y) \in (BN) \iff \overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BM}\right) = 0$.
   On a $\overrightarrow{BN} = (t+1, -t+1)$ et $\overrightarrow{BM} = (x+1, y+1)$. On en déduit alors
   $$\begin{aligned} M(x,y) \in (BN) &\iff (t+1)(y+1) - (-t+1)(x+1) = 0 \\ &\iff (t-1)x + (t+1)y + 2t = 0 \end{aligned}$$
   $\boxed{\text{Une équation cartésienne de la droite } (BN) \text{ est } (t-1)x + (t+1)y + 2t = 0}$
2. On a $\boxed{\overrightarrow{AN} = (t-1, -t-1)}$
3. Un point $M(x,y) \in \Delta \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$.
   On a $\overrightarrow{AM} = (x-1, y-1)$ d'où l'on tire $M(x,y) \in \Delta \iff (x-1)(t-1) + (y-1)(-t-1) = 0$, soit après simplification $\boxed{\text{Une équation cartésienne de la droite } \Delta \text{ est } (t-1)x - (t+1)y + 2 = 0}$
4. Les droites (BN) et Δ sont parallèles si et seulement si les vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}_1$ et $\overrightarrow{n}_2$ sont colinéaires.
   On a ici $\overrightarrow{n}_1 = (t-1, t+1)$ et $\overrightarrow{n}_2 = (t-1, -(t+1))$ et deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul soit ici
   $$-(t-1)(t+1) - (t+1)(t-1) = 0$$
   c'est-à-dire après simplification $\boxed{(t-1)(t+1) = 0}$.
   $\boxed{\text{Les droites } (BN) \text{ et } \Delta \text{ sont parallèles pour } t_1 = -1 \text{ et } t_2 = 1}$
5. $$\begin{aligned} M(x,y) \in (BN) \cap \Delta &\iff \begin{cases} (t-1)x + (t+1)y + 2t = 0 \\ (t-1)x - (t+1)y + 2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2(t-1)x = -2(t+1) \\ 2(t+1)y = -2(t-1) \end{cases} \end{aligned}$$
   Or $t \neq t_1$ et $t \neq t_2$ alors
   $$\boxed{M(x,y) \in (BN) \cap \Delta \iff x = -\frac{t+1}{t-1} \text{ et } y = -\frac{t-1}{t+1}}$$
6. (a) $\boxed{\text{La fonction } u \text{ est définie sur } \mathbf{R} - \{1\}}$ et $\boxed{\text{la fonction } v \text{ est définie sur } \mathbf{R} - \{-1\}}$
   (b) Les fonctions u et v sont dérivables sur tout intervalle inclus dans leur domaine de définition, et par calcul immédiat, on obtient
   $$\boxed{u'(t) = \frac{2}{(-t+1)^2}, \quad v'(t) = \frac{-2}{(t+1)^2}}$$
   $\boxed{\text{La fonction } u \text{ est strictement croissante sur }]-\infty\,;1[\text{ et sur }]1\,;+\infty[.}$
   $\boxed{\text{La fonction } v \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty\,;-1[\text{ et sur }]-1\,;+\infty[.}$
   (c) Le tableau des variations conjointes est alors le suivant :

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$u'(t)$		$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	$\Vert$	$+$	
u	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-1
v	-1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
$v'(t)$		$-$	$\Vert$	$-$	$\frac{-1}{2}$	$-$	

(d) Courbe G :

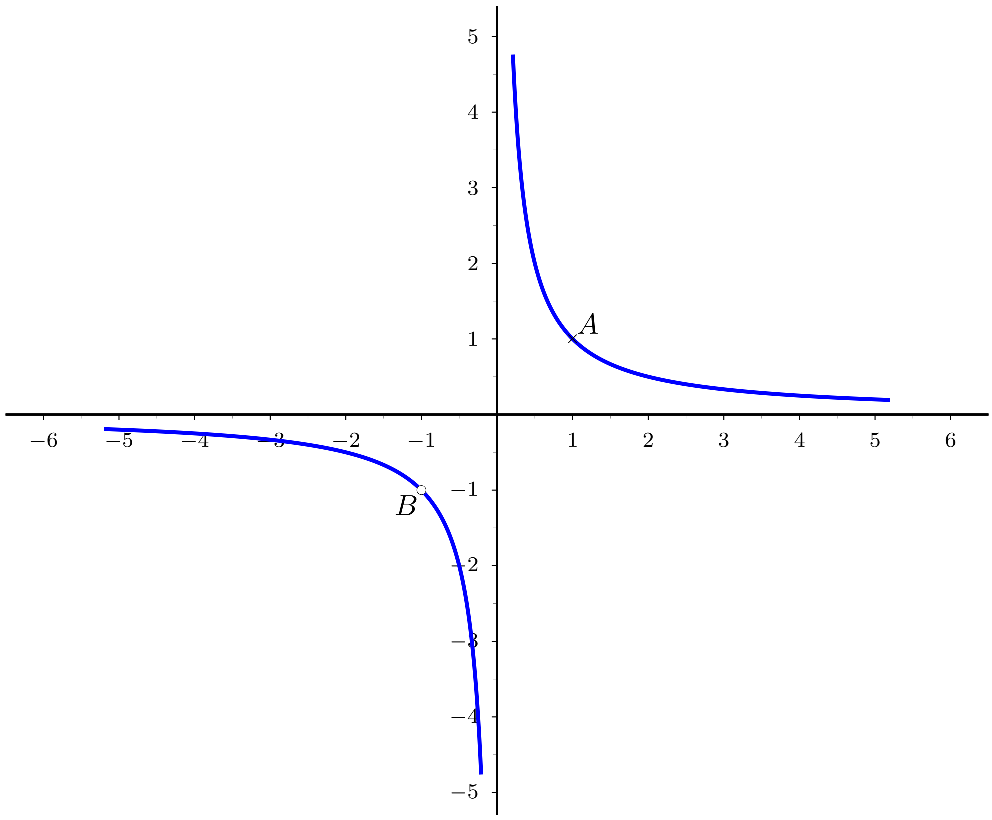

FIGURE 2 – Courbe G

7. (a) On remarque que $u(0) = v(0) = 1$.
   Par conséquent, $\boxed{\text{le point } A \text{ appartient à la courbe } G \text{ pour } t = 0.}$
   (b) D'après le tableau des variations conjointes, $u(t) \neq -1$, donc
   $\boxed{\text{le point } B \text{ n'appartient pas à la courbe } G}$
8. (a) Par calcul immédiat, on a $\boxed{u(t)v(t) = 1}$
   (b) D'après le tableau des variations conjointes, et en fait, le théorème des valeurs intermédiaires, lorsque t décrit $\mathbf{R} - \{-1, 1\}$, $u(t)$ décrit $\mathbf{R} - \{-1, 0\}$. On a alors $v(t) = \dfrac{1}{u(t)}$
   $\boxed{G \text{ est alors la courbe } H \text{ à laquelle on a retiré un point, le point } B.}$